

## МОДЕЛЮВАННЯ ВІБРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У СИСТЕМІ «СТРІЛЕЦЬ—ЛУК—СТРІЛА»

**Заневський Ігор**, Львівський державний університет фізичної культури

**Анотація.** Метою роботи є створення механіко-математичної моделі вібраційних процесів, що супроводжують спільний рух стріли з луком у його головній площині. Завдання дослідження: обґрунтувати модель статичної системи «стрілець—лука—стріла»; розробити модель вібрації та динамічної стійкості системи; провести верифікацію форми коливань. Методи: принцип Даламбера, метод Релея-Рітца, метод рівнянь Лагранжа 2-го роду, метод ітерацій, методи теорії коливань та динамічної стійкості, чисельні методи систем комп'ютерної математики.

Розглянуто вібраційні процеси та втрату динамічної стійкості в системі «стрілець—лука—стріла». Аналіз рухів у системі проведено з використанням механіко-математичної моделі, нейтральне положення якої визначалося як розв'язок задачі статичної для моменту випуску тятиви. Визначено власні частоти і форми коливань та динамічної нестійкості. Розрахунки проведено з використанням загальнодоступних пакетів прикладних програм на персональному комп'ютері. Пропонована методика може бути використана для моделювання й аналізу антропометричних систем в інших галузях діяльності людини. Результати представлено таблицями і графіками у вигляді, зручному для інженерних розрахунків та розв'язання задач спортивної практики.

**Ключові слова:** спортивний лук, динаміка, стійкість, вібрації, власні форми, частоти.

**Постановка проблеми.** Якісне налаштування параметрів лука та стріл дозволяє значно покращити результат і є абсолютно необхідним щоб розраховувати на перемогу. Оскільки стріла й рука, що тримає руківку лука, в принципі, не можуть одночасно знаходитись на осі симетрії лука спільний рух стріли з тятивою супроводжується коливаннями у вертикальній площині. Вважається, що вертикальне налаштування лука передбачає досягнення такої комбінації його параметрів, яка забезпечує нульовий кут атаки стріли в момент її відходу від тятиви. Це забезпечує мінімальну силу аеродинамічного опору польоту стріли, що за решти рівних умов скорочує час польоту до мішені, а отже, й вірогідність негативної дії поривів бокового вітру [1].

Спільний рух стріли з тятивою характеризується інтенсивним динамічним процесом, а саме поздовжнім згином імпульсного характеру та вібрацією. Латеральною складовою просторового руху тут можна знехтувати, оскільки відповідні переміщення й енергетичні потоки є на кілька порядків меншими від того, що відбувається у вертикальній площині.

Роботу виконано в рамках завдань НДР за темою 2.2.5 Зведеного плану науково-дослідної роботи у сфері фізичної культури і спорту на 2006—2010 роки «Моделювання процесів взаємодії тіла людини зі спортивним приладдям».

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Спільні коливання стріли з луком було вперше зафіксовано з використання швидкісної кінозйомки [15]. На сьогодні розроблено декілька варіантів механіко-математичних моделей спільних коливань стріли й лука у латеральній площині, але нам не відомо про подібні розробки стосовно головної вертикальної площини лука.

Основи механіко-математичного моделювання спортивного лука було закладено на початку другої половини минулого століття Гікманом і Клопстегом [6]. Окрім іншого вони запропонували розрахункову модель, головними елементами якої є кінематичний ланцюг, що моделює руківку й плечі лука. Схема моделі складається з трьох абсолютно жорстких стрижнів, що з'єднано двома пружними шарнірами, які моделюють пружні властивості плечей. Гікман записав відповідний Лагранжіан й отримав диференціальне рівняння руху й початкові умови. Стріла моделювалася точковою масою на осі симетрії лука. Одна третина маси тятиви приєднувалася до маси стріли. Марлоу розвинув цю модель, врахувавши пружні властивості тятиви й отримавши таким чином систему двох диференціальних рівнянь Лагранжа [10].

Наступним кроком до розвитку моделі було використання геометрично нелінійної моделі гнучкого стрижня для аналізу згину плеча й запроваджено метод кінцевих елементів для алгебризації відповідних диференціальних рівнянь з частинними похідними по поздовжній координаті плеча й за часом [8, 13]. Коої вдосконалив модель плеча, врахувавши ділянки прилягання до нього тятиви й запропонував відповідний метод аналізу [9, 14].

Усі зазначені моделі будувалися на основі симетричної схеми лука. Основи моделі з використанням асиметричної схеми було розроблено для аналізу зовнішньої балістики стріли [2, 16, 18, 19, 20]. Модель розроблялася у двох варіантах. Основний варіант на основі моделі Гікмана дозволив змоделювати основні властивості системи з недеформівною стрілою, який було використано для розв'язання задачі про узгодження параметрів системи «лук—



Пов'яжемо між собою геометричні параметри нейтрального й зміщеного положень ланцюга:

$$\begin{aligned} \theta_{U/L} &= \theta + \Delta\theta_{U/L}; \quad \gamma_{U/L} = \gamma + \Delta\gamma_{U/L}; \\ s_{U/L} &= s + \Delta s_{U/L}, \end{aligned} \quad (3)$$

де літерою  $\Delta$  позначено малі переміщення та деформації. Після підстановки (3) в (2) та перетворень з урахуванням (1) отримуємо систему трьох лінійних відносно сум  $(\Delta\theta_U + \Delta\theta_L)$ ,  $(\Delta\gamma_U + \Delta\gamma_L)$ ,  $(\Delta s_U + \Delta s_L)$  однорідних алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned} l(\Delta\theta_U + \Delta\theta_L)\cos\theta + s(\Delta\gamma_U + \Delta\gamma_L)\cos\gamma \\ + (\Delta s_U + \Delta s_L)\sin\gamma &= 0; \\ l(\Delta\theta_U + \Delta\theta_L)\sin\theta - s(\Delta\gamma_U + \Delta\gamma_L)\sin\gamma \\ + (\Delta s_U + \Delta s_L)\cos\gamma &= 0; \\ [c_s(s-s_0)l\cos(\theta+\gamma) - c_l](\Delta\theta_U + \Delta\theta_L) \\ + c_s(s-s_0)l\cos(\theta+\gamma)(\Delta\gamma_U + \Delta\gamma_L) + \\ c_s l \sin(\theta+\gamma)(\Delta s_U + \Delta s_L) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Детермінант цієї системи за реальних співвідношень характеристик сучасних спортивних луків ([www.hoytusa.com](http://www.hoytusa.com); [www.win&win.com](http://www.win&win.com)):

$$\frac{s_0}{l} < 2; \quad \frac{s-s_0}{s_0} < 0,02; \quad 20^\circ < \theta + \gamma < 180^\circ,$$

що відповідають Стандарту FITA (Міжнародної федерації стрільби з лука: [www.archery.org](http://www.archery.org)) не дорівнює нулю:

$$\begin{aligned} c_s(s-s_0)l^2\cos^2(\theta+\gamma) + c_l s + c_s l^2 s \sin^2(\theta+\gamma) \\ \times \left[ 1 - \frac{s_0}{l} \frac{s-s_0}{s_0} \frac{\cos(\theta+\gamma)}{\sin^2(\theta+\gamma)} \right] > 0. \end{aligned}$$

У наслідок цього система (4) має тільки нульові розв'язки:

$$\Delta\theta_U + \Delta\theta_L = 0; \quad \Delta\gamma_U + \Delta\gamma_L = 0; \quad \Delta s_U + \Delta s_L = 0.$$

Отож у подальшому, досліджуючи малі поперечні коливання симетричного кінематичного ланцюга, можна прийняти:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_U \equiv -\Delta\theta_L = \tau; \quad \Delta\gamma_U \equiv -\Delta\gamma_L; \quad \Delta s_U \equiv -\Delta s_L; \\ \Delta\theta'_U \equiv -\Delta\theta'_L = \tau'. \end{aligned} \quad (5)$$

Модель вібрації та динамічної стійкості системи. Спільний рух стріли з луком супроводжується інтенсивними коливаннями та втратою динамічної стійкості стріли імпульсивного характеру [12]. Інженерна методика аналізу цього процесу може бути побудована на моделі динамічного поздовжнього згину довгого стрижня в рамках гіпотез Ейлера-Бернуллі [19], оскільки довжина стріли на два порядки перевищує її діаметр та амплітуду згинальних переміщень.

Математичною моделлю цих коливань доцільно прийняти рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} = 0, \quad (6)$$

де  $T = T_a + T_b$  і  $P = P_a + P_b$  — відповідно кінетична й потенціальна енергія системи,  $q_i$  — узагальнені координати;  $t$  — час; рисикою позначено частинну похідну по часу, тобто  $(\dot{\phantom{x}}) \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ ; індекси «а» і «б» стосуються відповідно стріли та лука.

З урахуванням (5) запишемо вирази для енергії (див. рис. 1):

$$\begin{aligned} T_b &= \frac{1}{2} \left\{ m_A \eta_A'^2 + (I_H + 2m_l h^2) \kappa'^2 + 2I_l (\tau' + \kappa')^2 \right\}; \\ P_b &= P_l + P_s, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $m_A = \frac{1}{3} m_s$  — приведена до гнізда стріли маса тятиви;  $m_s$  — маса всієї тятиви;  $I_H$  — момент інерції руківки, стабілізаторів та прицілу відносно точки прикладення сили руки (Ш);  $m_l$  — маса плеча;  $I_l$  — момент інерції плеча відносно осі шарніра на руківці з урахуванням частини маси тятиви  $\frac{1}{3} m_s$ , приведеної до місця підв'язування;  $r_l$  — відстань від цього шарніра до центра маси плеча;

$P_l = \frac{1}{2} c_l [(\theta_U + \varphi)^2 + (\theta_L + \varphi)^2 - 2(\theta + \varphi)^2] = c_l \tau^2$  — зміна потенціальної енергії плечей при переході від нейтрального до зміщеного положення ланцюга;

$P_s = \frac{c_s}{2} [(s_U - s_0)^2 + (s_L - s_0)^2 - 2(s - s_0)^2] = A_s \Delta s^2$  — зміна потенціальної енергії тятиви;

$\Delta s = l \tau \sin(\theta + \gamma) + (\xi_A \kappa + \eta_A) \cos \gamma$ .

Вирази для потенціальної та кінетичної енергії стріли мають вигляд (рис. 2):

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{l_a} \varepsilon(z_a) \left( \frac{\partial^2 \eta_a}{\partial z_a^2} \right)^2 dz_a + \right. \\ &\quad \left. \int_0^{l_a} \xi_A'' \int_0^{l_a} \mu(z_a) \left[ \int_0^{z_a} \left( \frac{\partial \eta_a}{\partial z_a} \right)^2 d\chi + \left( \frac{\partial \eta_a}{\partial z_a} \right)^2 \Big|_{z_a=l_a} \right] dz_a \right\}; \\ T_a &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{l_a} \mu_a(z_a) \eta_a'^2 dz_a + m_p \eta_a'^2(l_a) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\varepsilon(z_a)$  — погонна жорсткість деревка стріли (зовнішньої ланки);  $\mu(z_a)$  відповідна погонна маса;  $l_a$  довжина стріли;  $m_p$  маса її наконечника. Другий доданок у виразі потенціальної енергії (8) є потенціалом сили інерції поздовжнього прискореного руху стріли, прикладеної згідно з принципом Даламбера.

Будемо вивчати лінійні коливання стріли, розкладаючи їх на власні форми. Переважна частина відповідних переміщень припадає на дві перші власні форми. Ці форми мають відповідно два і три вузли. Вирази для власних форм можна записати з

використанням відомих функцій Крилова, однак, з врахуванням прийнятної для інженерних розрахунків точності, форму коливань можна апроксимувати гіпотетичною функцією [18]. Таким чином розв'язання задачі зводимо до енергетичного методу Релея-Рітца. Виходячи з даних швидкісної відео зйомки [15], представляємо гіпотетичну форму у вигляді суми лінійної функції та гармонік повної та половини синусоїди:

$$\eta_{a3} = \eta_A + \psi z + f_2 \sin \frac{\pi z}{l_a} + f_3 \sin \frac{2\pi z}{l_a};$$

де  $f_2, f_3$  — амплітуди складових коливань від згинальних деформацій;  $\psi$  — кут піднесення осі стріли.

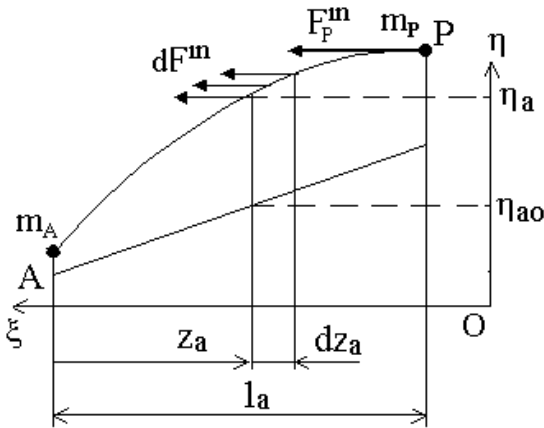


Рис. 2. Схема моделі стріли

Підставляючи вираз гіпотетичної форми (9) у два останні вирази енергії (8), отримуємо для стріли циліндричної форми:

$$P_a = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{\pi^4 \varepsilon}{2l_a^3} f_2^2 + \frac{8\pi^4 \varepsilon}{l_a^3} f_3^2 + \right. \\ \left. m_{sh} \left[ \frac{l_a}{2} \psi^2 + \frac{4}{\pi} \psi f_2 + \frac{\pi^2}{4l_a} f_2^2 + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\pi^2}{l_a} f_3^2 + \frac{16}{3l_a} f_2 f_3 \right] \right. \\ \left. + m_p \left( l_a \psi^2 + \frac{\pi^2}{2l_a} f_2^2 + \frac{2\pi^2}{l_a} f_3^2 \right) \right] \end{array} \right\};$$

$$T_a = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} \left( \eta_A'^2 + \frac{l_a^2}{3} \psi'^2 + \frac{f_2'^2}{2} + \frac{f_3'^2}{2} - \frac{l_a}{\pi} \psi' f_3' \right) \\ \left( + l_a \eta_A' \psi' + \frac{4}{\pi} \eta_A' f_2' + \frac{2}{\pi} l_a \psi' f_2' \right) \\ \left( + m_A \eta_A'^2 + m_p (\eta_A' + l_a \psi')^2 + m_B \eta_B'^2 \right) \end{array} \right], \quad (10)$$

де  $m_{sh}$  — маса древка, тобто стріли без наконечника.

Призначаючи узагальнені координати  $q_i \equiv \kappa, \tau, \eta_A, \psi, f_2, f_3$  після підстановки виразів енергії у рів-

няння Лагранжа (6) отримуємо диференціальні рівняння коливань системи:

$$I_\kappa \kappa'' + I_\tau \tau'' + c_s \Delta s \xi_{sA} \cos \gamma = 0;$$

$$I_l \tau'' + c_l \tau + c_s l \Delta s \sin(\theta + \gamma) + I_\tau \kappa'' = 0;$$

$$(m_A + m_{sh} + m_p) \eta_A'' + 2c_s \Delta s \cos \gamma +$$

$$\left( \frac{m_{sh}}{2} + m_p \right) l_a \psi'' + \frac{2}{\pi} m_{sh} f_2'' = 0;$$

$$\left( \frac{m_{sh}}{3} + m_p \right) l_a \psi'' + \left( \frac{m_{sh}}{2} + m_p \right) \eta_A'' + \frac{m_{sh}}{\pi} f_2'' -$$

$$\frac{m_{sh}}{2\pi} f_3'' + \left[ \left( \frac{m_{sh}}{2} + m_p \right) l_a \psi + \frac{2}{\pi} m_{sh} f_2 \right] \frac{\xi_{sA}''}{l_a} = 0;$$

$$\frac{m_{sh}}{2} f_2'' + \frac{2}{\pi} m_{sh} \eta_A'' + \frac{m_{sh}}{\pi} l_a \psi'' + \frac{\pi^4 \varepsilon}{2l_a^3} f_2 +$$

$$\left[ \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{m_{sh}}{2} + m_p \right) f_2 + \frac{2}{\pi} m_{sh} l_a \psi + \frac{8}{3} m_{sh} f_3 \right] \frac{\xi_{sA}''}{l_a} = 0;$$

$$\frac{m_{sh}}{2} f_3'' - \frac{m_{sh}}{2\pi} l_a \psi'' + \frac{8\pi^4 \varepsilon}{l_a^3} f_3 +$$

$$\left[ \pi^2 m_{sh} f_3 + \frac{8}{3} m_{sh} f_2 + 2\pi^2 m_p f_3 \right] \frac{\xi_{sA}''}{l_a} = 0, \quad (11)$$

де  $I_\kappa = \frac{1}{2} I_H + m_l h_l^2 + I_l + 2m_l h_l r_l \cos \theta$ ;  $I_\tau = I_l + m_l h_l r_l \cos \theta$ .

Власні частоти  $\omega$  й форми коливань системи визначаємо, підставляючи в рівняння (11) розв'язки у вигляді:  $q_i = \alpha_i \cos \omega t$ , де  $\alpha_i$  — амплітуди коливань. Головний детермінант отриманої системи лінійних відносно амплітуд рівнянь прирівнюємо нулю:

$$\det(a_{ij}) = 0, \quad (12)$$

де  $i, j = 1 \dots 6$ ;  $a_{11} = c_s (\xi_{sA} \cos \gamma)^2 - \omega^2 I_\kappa$ ;

$$a_{12} = a_{21} = c_s l \xi_{sA} \sin(\theta + \gamma) \cos \gamma - \omega^2 I_\tau;$$

$$a_{13} = a_{31} = c_s \xi_{sA} \cos^2 \gamma; \quad a_{14} = a_{41} = 0;$$

$$a_{15} = a_{51} = 0; \quad a_{16} = a_{61} = 0;$$

$$a_{22} = c_s [l \sin(\theta + \gamma)]^2 + c_l - \omega^2 I_l;$$

$$a_{23} = a_{32} = c_s l \sin(\theta + \gamma) \cos \gamma; \quad a_{24} = a_{42} = 0;$$

$$a_{25} = a_{52} = 0; \quad a_{26} = a_{62} = 0;$$

$$a_{33} = c_s \cos^2 \gamma - 0,5(m_A + m_{sh} + m_p) \omega^2;$$

$$a_{34} = -0,5 l_a \omega^2 \left( \frac{m_{sh}}{2} + m_p \right); \quad a_{35} = -\omega^2 m_{sh} / \pi;$$

$$a_{36} = a_{63} = 0; \quad a_{43} = 2a_{34} / l_a; i;$$

$$a_{45} = \left( \frac{2}{l_a} \xi_{sA}'' - \omega^2 \right) \frac{m_{sh}}{\pi}; \quad a_{46} = \frac{\omega^2 m_{sh}}{2\pi};$$

$$a_{53} = 2a_{35}; \quad a_{54} = a_{45}l_a;$$

$$a_{55} = \frac{\pi^4 \varepsilon}{2l_a^3} + \frac{\pi^2 \xi_A''}{2l_a} \left( \frac{m_{sh}}{2} + m_p \right) - 0,5m_{sh}\omega^2;$$

$$a_{56} = a_{65} = \frac{8m_{sh}\xi_A''}{3l_a}; \quad a_{64} = a_{46}l_a;$$

$$a_{66} = \frac{8\pi^4 \varepsilon}{l_a^3} + \frac{\pi^2 \xi_A''}{l_a} (m_{sh} + 2m_p) - 0,5m_{sh}\omega^2$$

чисельно задача розв'язувалася з використанням стандартної функції Det СКМ Mathematica. Значення детермінанту (12) вираховувалося з послідовною зміною значення квадрата власної частоти ( $\omega^2$ ). Якщо значення детермінанта змінювало знак, то це свідчило про віднайдення власної частоти. Далі її значення уточнювалося ділення відрізка навпіл. Геометричні параметри системи у нейтральному положенні ( $\xi_A$ ,  $\theta$ ,  $\gamma$ ) визначалися з рівнянь (1) з використанням стандартної функції Find СКМ MathCAD. Таким чином, метод аналізу було реалізовано на основі стандартних функцій загальнодоступних пакетів прикладних комп'ютерних програм, що дає можливість його використання в інженерних розрахунках та в спортивній практиці.

Для виявлення оптимальної (з точки зору простоти й достатньої в інженерних розрахунках точності) моделі форми вібрації зовнішньої ланки розглянемо спрощені варіанти моделі гіпотетичної форми (9). Одна з них описує рухи вільної ланки як недеформівного стрижня:

$$\eta_{a1} = \eta_A + \psi z, \quad (13)$$

а друга — як гнучкого стрижня з двома вузлами згинальної деформації:

$$\eta_{a2} = \eta_A + \psi z + f_2 \sin \frac{\pi z}{l_a}. \quad (14)$$

Верифікація гіпотетичної форми (9). Щоб визначити наскільки точно гіпотетична форма (9) відповідає істинним (у межах технічної теорії згинальних коливань довгих стрижнів) власним формам, перевіримо її на класичних задачах вільного від в'язей стрижня, а також стрижня з одним вільним, а другим шарнірно закріпленим кінцем. Реальне закріплення хвостовика стріли в гнізді тятиви знаходиться між цими двома варіантами.

Диференціальне рівняння згинальних коливань такого стержня має вигляд:

$$\varepsilon \frac{\partial^4 y}{\partial y^4} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (15)$$

Граничні умови, характеристичні рівняння та нульові власні частоти для означених варіантів (рис. 3):

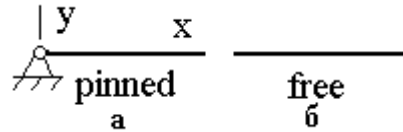
$$x = 0, y = 0, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0; \quad x = l, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0; \quad (16)$$

$th(al) = tg(al); \quad \omega_1 = 0$  (рис. 3 а);

$$x = 0, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0; \quad x = l, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0; \quad (17)$$

$ch(al)\cos(al) = 1; \quad \omega_1 = \omega_2 = 0$  (рис. 3 б);

де  $\alpha^4 = \omega^2 \frac{\mu}{\varepsilon}$ .



**Рис. 3.** Схеми для верифікації моделі стріли: а — стрижень з одним вільним, а другим шарнірно закріпленим кінцем; б — вільний від в'язей стрижень

«Точний» розв'язок диференціального рівняння (15) відносно безрозмірної величини  $al$  визначався з характеристичного рівняння, а розв'язок на основі гіпотетичної форми (9), тобто методом Релея-Рітца — з детермінанта (12). Для першого варіанту граничних умов (16) приймалося  $i, j = 4...6$ , а для другого (17) —  $i, j = 3...6$ ;  $m_A = 0$ . Порівняльні результати зведено в таблицю 1.

Відносна похибка для власної частоти в межах 2% знаходиться нижче рівня похибок, припустимих для визначення механічних параметрів спортивного лука і стріл, тому гіпотетичну форму (9) можна вважати прийнятною в рамках розробленої моделі.

**Обговорення результатів.** Для прикладу розглянемо сучасний спортивний лук середніх розмірів ([www.hoytusa.com](http://www.hoytusa.com); [www.eastonarchery.com](http://www.eastonarchery.com)):  $I_k = 0,671$  кгм<sup>2</sup>;  $m_l = 0,0953$  кг;  $h = 0,4343$  м;  $I_l = 0,006344$  кгм<sup>2</sup>;  $r_l = 0,2165$  м;  $l = 0,48$  м;  $c_l = 120,78$  м;  $c_s = 14000$  Н/м;  $s_0 = 0,85$  м;  $\xi_A = l_a = 0,7$  м;  $\theta = 0,7608$  рад;  $\gamma = 0,4410$  рад;  $m_s = 0,0069$  кг;  $m_s = 0,0205$  кг;  $m_p = 0,0045$  кг. Підставляючи ці параметри у рівняння (12), отримуємо значення власних частот (кругових) для різних варіантів моделі (табл. 2): (13) для моделі стріли як недеформівного стрижня ( $i, j = 1...4$ ); (14) — гнучкого стрижня з двома вузлами форми згину ( $i, j = 1...5$ ); (11) — з трьома вузлами ( $i, j = 1...6$ ).

Стріла полишає тятиву, коли прискорення її поздовжнього переміщення знижується до нуля. У цей момент система має два нульових значення власних частот: одне з них описує вільне обертання лука відносно центра руківки О (ця частота не записана в табл. 2), а друга — вільне обертання стріли відносно гнізда тятиви А (див. рис. 1, 2). Увесь попередній час спільного прискореного руху з луком стріла відбувала втрату динамічної стійкості з відповідним уявним значенням власної частоти, яка й описувала вимушене обертання.

Чим більшим є абсолютна величина прискорення, тим меншою стає значення власної частоти. У діапазоні реальних значень прискорень (до

Порівняльні результати розв'язків для власних частот моделі стріли

Схема	(рис. 3 а)		(рис. 3 б)	
Номер власної частоти	2	3	3	4
«Точний» розв'язок	3,927	7,068	4,730	7,853
Релея-Рітца	3,930	7,175	4,762	7,940
Похибка в межах, %	0,1	1,6	0,7	1,1

Таблиця 2

Власні системи «стріла—лук» для різних моделей стріли: 4 — стріла як недеформівний стрижень (13); 5 — гнучкий стрижень з двовузловою формою згину (14); 6 — з тривузловою формою (11).

Розв'язок (форма)	Поздовжнє прискорення стріли $\xi_A''$ , м/с <sup>2</sup>		
	0	-3000	-6000
4(1)	0	78i <sup>*)</sup>	113i
4(2)	133	128	125
4(3)	1801	1792	1790
5(1)	0	78i	114i
5(2)	133	128	125
5(3)	404	347	277
5(4)	2282	2270	2261
6(1)	0	78i	115i
6(2)	133	128	125
6(3)	403	343	270
6(4)	1321	1280	1235
6(5)	2635	2598	2575

<sup>\*)</sup>  $i = (-1)^{1/2}$  — уявна одиниця.

6000 м/с<sup>2</sup> [20]) значення вищих власних частот знижуються несуттєво або помірно — в межах 2,3% (див. рядки 4(3), 5(4) і 6(5) у табл. 2; рис. 4). Значення вищих натуральних частот, які відповідають тривузловій формі) спадають в межах 6,5% (див. рядок 6(4) у табл. 2; рис. 4). Значення натуральних частот, які відповідають двовузловій формі) спадають більш суттєво, тобто на 31—33% (див. рядки 5(3) і 6(3) у табл. 2; рис. 5).

З використанням тривузлової форми (11) ми отримуємо розв'язок точніший за той, що маємо з двовузлової форми (14), а саме 403 замість 404 с-1 (див. табл. 2).

Розв'язок для власної частоти основного тону коливань системи руківка-плечі не є дуже чутливим до моделі згину стріли (див. рядки 4(2), 5(2) і

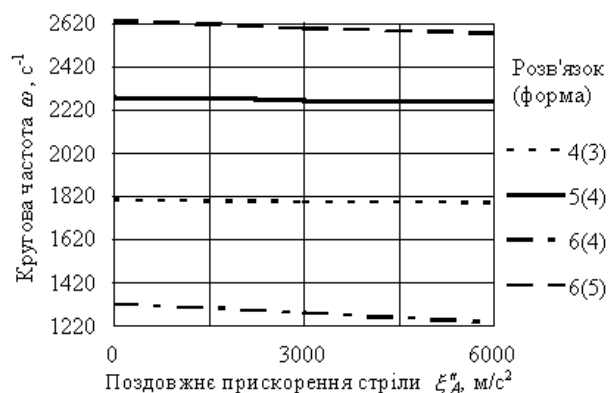


Рис. 4. Вищі власні частоти

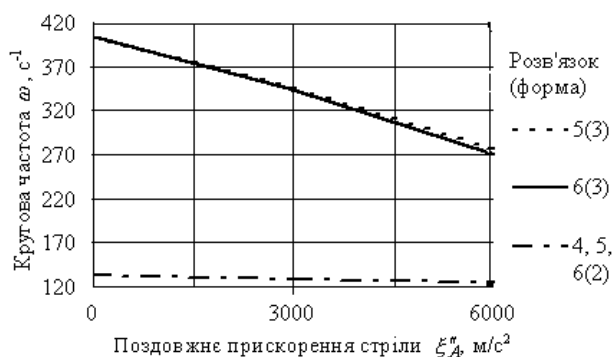


Рис. 5. Нижчі власні частоти.

6(2) у табл. 2; рис. 5). Розв'язок для вищої частоти системи руківка-плечі, навпаки, є чутливим до моделі згину стріли (див. рядки 4(3), 5(4) і 6(5) у табл. 2; рис. 4). Різниця між відповідними розв'язками складає 13—32%.

Під час спільного прискореного руху з тятивою стріла відбуває втрату стійкості з одно вузловою формою. Уявна величина відповідної власної частоти не чутливою до моделі згину стріли (див. рядки 4(1), 5(1) і 6(1) у табл. 2).

Виходячи з результатів аналізу залежності точності розв'язків стосовно власних частот, можна вважати прийнятною три вузлову форму згинальних коливань стріли (11).

Порівняння представлених результатів механіко-математичного й комп'ютерного моделювання

коливань у системі «стріла—лук» з результатами швидкісної відео зйомки [15] показує не тільки якісну, але й кількісну їхню подібність, що дозволяє сформулювати наступні висновки.

### Висновки

1. Спільний рух стріли з луком являє собою інтенсивний динамічний процес імпульсного характеру, для якого характерні полігармонічні вібрації у головній вертикальній площині лука, згинальні коливання та втрата динамічної стійкості стріли, яка відбувається за одновузловою формою.
2. В основу методики аналізу цих процесів може бути покладено модель динамічного поздовжнього згину стрижня в рамках технічної теорії, тобто гіпотез Ейлера-Бернуллі, що описує стрілу лука, з приєднаним до нього складним кінематичним ланцюгом, який описує спортивний лук.
3. В якості моделі гіпотетичної форми вібрації та динамічного поздовжнього згину стріли доцільно використати суму лінійної функції та гармонік у вигляді півхвилі синусоїди та повної синусоїди, що дозволяє отримати значення власних частот і амплітуд вібрацій з точністю, прийнятною в інженерних розрахунках (тобто з похибкою до 2 %).
4. Пропонований підхід до моделювання вібраційних процесів у системі «стрілець—лук—стріла» дозволяє провести її статичний та динамічний аналіз з використанням чисельних методів з набору стандартних підпрограм широкодоступних пакетів систем комп'ютерної математики.
5. Результати представлено таблицями і графіками у вигляді, зручному для інженерних розрахунків та розв'язання задач спортивної практики. Розроблені механіко-математичні моделі та методика їх аналізу можуть бути використані для дослідження антропотехнічних систем з інших галузей діяльності людини.

### Список літератури

1. *Заневський І.П.* Балістика стріли спортивного лука // Технічні вісті. — 2004. — № 2 (19). — С. 43—47.
2. *Заневський І.П.* Вібрації та динамічна стабільність спортивного лука у вертикальній площині. // Науково-технічний збірник Військового інституту на-

ціонального університету «Львівська політехніка». — 2006. — № 5. — С. 96—105.

3. *Заневський І.* Динаміка системи лук—стріла у вертикальній площині // *Машинознавство*. — 2003. — № 8. — С. 7—15.
4. *Bajer P., Bowers L., Fowkes C.R., Schoeh S.* Instructor's manual. (Ed: R.E. Rowe). — Colorado Springs: National Archery Association of USA, 1982. — 218 p.
5. *Gros H., Zanevskyy I.* Archer-bow-arrow system adjustment in the vertical plane. Scientific proceeding of the XX International Symposium of Biomechanics in Sports, Ed. K.E. Gianikellis, Universided de Extremadura, Spain, 2002, pp. 469—472.
6. *Hickman C.N., Nagler F., Klopsteg P.E.* Archery: the technical side. — Redlands: National Field Archery Association, 1947. — 148 p.
7. *Kooi B.W. & Sparenberg J.A.* On the mechanics of the arrow: Archer's Paradox. *Journal of Engineering Mathematics*, 1997, 31, pp. 285—303.
8. *Kooi B.W.* Archery and mathematical modeling // *Journal of the Society of Archer-Antiquaries*. — 1991. — 34. — pp. 21—29.
9. *Kooi B.W.* On the mechanics of the modern working-recurve bow. // *Computational Mechanics*. — 1991. — 8. — pp. 291—304.
10. *Marlow W.C.* Bow and arrow dynamics. // *American Journal of Physics*. — 1981. — 49. — pp. 320—333.
11. *Ohsima S. & Ohtsuki A.* Simulation of the shape and dynamics of Japanese bow — Application of large deflection theory. / *The book of the 4th Int. conf. on the Engineering of Sport*, Kyoto, Japan, 2002, pp. 102—107.
12. *Seay Ch.* Column-thrust arrow matching // *Archery World*. — 1984, 17, (5). — pp. 43—48.
13. *Soong T-C.* An optimally designed archery. — Xerox Corp. — Rochester, New York, 1986. — 16 p.
14. *Tuijn C., Kooi B.W.* The measurement of arrow velocities and the efficiency of working-recurve bows // *European Journal of Physics*. — 1992. — 13. — pp. 127—134.
15. *Werner Beiter Zeigt.* Highspeed film. — 1992.
16. *Zanevskyy I.* A model of string-limbs stiffness in the lateral plane of the sport bow. *The engineering of sport 4*, Ed. S.Ujihachi & S.J.Haake, Blackwell Publishing, Oxford, UK, 2002, pp. 65—71.
17. *Zanevskyy I.* Mechanical and mathematical modelling and computer simulation of vibration and impact processes in the «Man and Shooting Device» system / *Virtual Non-linear Multibody Systems*. — NATO Advance Study Institute, Vo 1, Prague, 2002, pp. 248—252.
18. *Zanevskyy I.* Vibration and instability of the chain with string members as an archery bow model / *Cable Dynamics*. — Liege, Belgium: ISCB 2007. — 71—78.
19. *Zanevskyy I.* Dynamics of «arrow-bow» system. // *Journal of Automation and Information Sciences*. — 1999. — 31 (3). — pp. 11—17.
20. *Zanevskyy I.* Lateral deflection of archery arrows. // *Sports Engineering*. — 2001. — 4 (1). — pp. 23—42.

Надійшла до редакції 29.05.2008

**Заневський Ігорь.** Моделирование вибрационных процессов в системе «стрелок—лук—стрела».

Целью работы является создание механико-математической модели вибрационных процессов, которые сопровождают совместное движение стрелы с луком в его главной плоскости. Задачи исследования: обосновать модель статики системы «стрелок—лук—стрела»; разработать модель вибрации и динамической устойчивости системы; провести верификацию формы колебаний. Методы: принцип Даламбера, метод Рэлея-Ритца, метод уравнений Лагранжа 2-го рода, метод итераций, методы теории колебаний и динамической устойчивости, численные методы систем компьютерной математики.

Рассмотрены вибрационные процессы и потеря динамической устойчивости в системе «стрелок—лук—стрела». Анализ движений в системе проведен с использованием механико-математической модели, нейтральное положение которой определялось как решение задачи статики для момента выпуска тетивы. Определены собственные формы, формы колебаний и динамической неустойчивости. Расчёты проведены с использованием общедоступных пакетов прикладных программ на персональном компьютере. Предлагаемая методика может быть использована для моделирования и анализа антропотехнических систем в других областях деятельности человека. Результаты представлены таблицами и графиками в виде, удобном для инженерных расчётов и решения задач спортивной практики.

**Ключевые слова:** спортивный лук, динамика, устойчивость, вибрации, собственные формы, частоты.

**Zanevskyy Ihor.** Modelling of vibration processes in the «archer—bow—arrow» system.

The aim of this research is creation of a mechanical and mathematical model of vibration processes which accompany a common movement of an arrow and a bow in its main plane. Targets of the research are to substitute a model of static of the system of «archer—bow—arrow»; to work out a model of vibration and dynamic stability of the system; to verify the form of oscillation. Methods are d'Alembert principle, Rayleigh-Ritz method, the method of Lagrange equations of the 2nd kind, method of iterations, methods of the theory of oscillations and dynamic stability, numerical methods of systems computer mathematics.

Vibration processes and dynamic instability in the system of «archer—bow—arrow» are considered. An analysis of the movement in the system is carried out using of a mechanical and mathematical model with a neutral position as a solution of a problem of static at the moment of launching a string. Natural forms and the forms of oscillation and dynamic instability are determined. Calculations were carried out with using common packets of software and with a personal computer. The proposing methods may be used for modelling and analysis of antropotechnical systems in other fields of human activity. The results are presented in tables and plots in the form suitable for engineering calculations and for the sport practice.

**Key words:** sport archery bow, dynamics, stability, vibration, natural forms, frequencies.



- Х98** **Худолій О. М.** Загальні основи теорії і методики фізичного виховання: Навч. посібник. — Харків: «ОВС», 2007. — 408 с.: іл. ISBN 966-7858-50-2.

У навчальному посібнику розглянуті загальні питання теорії фізичного виховання, а також теорія і методика розвитку рухових здібностей та навчання фізичним вправам.

Посібник рекомендовано викладачам і студентам факультетів фізичного виховання вищих педагогічних навчальних закладів III—IV рівня акредитації та вчителям фізичної культури середніх загальноосвітніх шкіл.